
SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA UNIVERSITA' DI BOLOGNA

F. SEGALA

PARAMETRICI PER OPERATORI TIPO TRICOMI

26 GENNAIO-2 FEBBRAIO 1984

Sia $A(t, x, Dx)$ un operatore differenziale del 2° ordine con simbolo principale positivo e sia $B(t, x, D_t, Dx)$ un operatore differenziale del 1° ordine. Per ogni fissata $f \in C^\infty(R_t, E'(R^N))$ siamo interessati alla costruzione di una $u \in C^\infty(R_t, \mathcal{D}(R^N))$ tale che

$$(1) \quad (D_t^2 + tA + N)u - f \in C^\infty(\Omega)$$

con Ω intorno di $(t_0, x_0) \in R_t \times R_x^N$.

Se $t_0 > 0$, u si costruisce utilizzando gli operatori pseudo-differenziali, se $t_0 < 0$, si utilizzano i F.I.O.. Se $t_0 = 0$ la u si costruisce mediante certe funzioni di Airy [2, 3]. Noi qui effettueremo le considerazioni e i calcoli sul modello $D_t^2 + t|Dx|^2$; per il caso generale si vedano [2, 3]. Precisamente, in [2] viene rappresentata con gli operatori integrali di Fourier-Airy la soluzione v del problema di Cauchy

$$(2) \quad \begin{cases} (D_t^2 + t|Dx|^2)v = f & t \geq 0 \\ v|_{t=0} = \psi \\ D_t v|_{t=0} = \phi \end{cases}$$

ed in [3] vi è la costruzione della w soluzione del problema di Dirichlet

$$(3) \quad \begin{cases} (D_t^2 + t|Dx|^2)w = f & t \geq 0 \\ w|_{t=0} = g \end{cases}$$

Scegliamo come dati del problema (2) $\psi = g$ e $\phi = D_t w|_{t=0}$.

Allora se definiamo

$$u(t) = \begin{cases} w(t) & t \geq 0 \\ v(t) & t \leq 0 \end{cases}$$

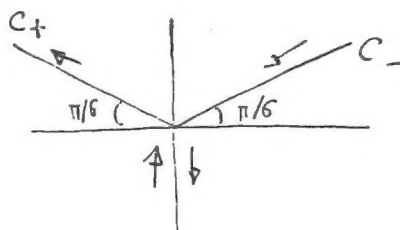
si ha

$$(D_t^2 + t |D_x|^2)u = f$$

1. COSTRUZIONE DI v

$$\text{Poniamo } A_{\pm}(z) = \int_{C_{\pm}} e^{i(tz - t^3/3)} dt$$

dove C_{\pm} sono i cammini nel piano complesso indicati in figura



Allora $A_{\pm}''(z) = z A_{\pm}(z)$ e [4]

$$(4) \quad A_{\pm}(\rho) = F_{\pm}(\rho) e^{\pm i \frac{2}{3} |\rho|^{3/2}}, \quad \rho \leq 1$$

$$(5) \quad F_{\pm}^{(k)}(\rho) \sim |\rho|^{-\frac{1}{4} - k}, \quad \rho \leq 1.$$

Consideriamo gli operatori

$$G_{\pm}(t,s)f(x) = \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{A_{\pm}(t|\xi|^{2/3})}{A'_{\pm}(s|\xi|^{2/3})} \hat{f}(\xi) d\xi$$

dove $t \leq s \leq 0$. Se $|t||\xi|^{2/3} \leq 1$, anche $|s||\xi|^{2/3} \leq 1$

ed allora $A_{\pm}(t|\xi|^{2/3})/A'_{\pm}(s|\xi|^{2/3}) \in S_{1,2/3,2/3}^{\circ}$. Se $|t||\xi|^{2/3} \geq 1$ e

$|s||\xi|^{2/3} \leq 1$ segue da (4) e (5) che $A_{\pm}(t|\xi|^{2/3})/A'_{\pm}(s|\xi|^{2/3}) =$

$= m_{\pm}(t,s,\xi) e^{\pm \frac{2}{3} i |t|^{3/2} |\xi|}$ con $m_{\pm} \in S_{1,2/3,2/3}^{\circ}$. Infine se

$|s||\xi|^{2/3} \geq 1$, sempre per (4), (5) si ottiene

$$A_{\pm}(t|\xi|^{2/3})/A'_{\pm}(s|\xi|^{2/3}) = n_{\pm}(t,s,\xi) e^{\pm \frac{2}{3} i (|t|^{3/2} - |s|^{3/2}) |\xi|} \quad \text{con}$$

$n_{\pm} \in S_{1,2/3,2/3}^{\circ}$. Quindi

$$G_{\pm}(t,s)f(x) = l_{\pm}(t,s,D)f(x)$$

$$+ \int e^{i[\langle x, \xi \rangle \pm \frac{2}{3} |t|^{3/2} |\xi|]} m_{\pm}(t,s,\xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

$$+ \int e^{i[\langle x, \xi \rangle \pm \frac{2}{3} (|t|^{3/2} - |s|^{3/2}) |\xi|]} n_{\pm}(t,s,\xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

Se $s = 0$, $t < 0$ fissato,

$$G_{\pm}(t,0)f(x) \equiv \int e^{i[\langle x, \xi \rangle \pm \frac{2}{3} |t|^{3/2} |\xi|]} q_{\pm}(t,\xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

$$\Rightarrow WFG_{\pm}(t,0) f \subset \{(y \pm \frac{2}{3} |t|^{3/2} n/|n|, n) | (y,n) \in Wff\}$$

Se $t < s < 0$ sono fissati,

$$G_{\pm}(t,s)f(x) \equiv \int e^{i\langle x, \xi \rangle + \frac{2}{3}(|t|^{3/2} - |s|^{3/2})|\xi|} P_{\pm}(t,s,\xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

$$WF G_{\pm}(t,s) f \subset \{(y \pm \frac{2}{3}(|t|^{3/2} - |s|^{3/2}) \eta / |\eta|, \eta) | (y, \eta) \in WF f\}$$

Ora abbiamo

$$G_{\pm}(s,s)f(x) = \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \frac{A_{\pm}(s|\xi|^{2/3})}{A'_{\pm}(s|\xi|^{2/3})} \hat{f}(\xi) d\xi$$

$$D_t G_{\pm}(s,s)f(x) = \frac{1}{i} |Dx|^{2/3}$$

Consideriamo

$$\begin{aligned} \det L &= \det \begin{vmatrix} |\xi|^{2/3} \frac{A_+(s|\xi|^{2/3})}{A'_+(s|\xi|^{2/3})} & |\xi|^{2/3} \frac{A_-(s|\xi|^{2/3})}{A'_-(s|\xi|^{2/3})} \\ \frac{1}{i} |\xi|^{2/3} & \frac{1}{i} |\xi|^{2/3} \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{i} |\xi|^{4/3} \frac{1}{A'_-(s|\xi|^{2/3}) A'_+(s|\xi|^{2/3})} [A_+(s|\xi|^{2/3}) A'_-(s|\xi|^{2/3}) - \\ &\quad - A_-(s|\xi|^{2/3}) A'_+(s|\xi|^{2/3})] , \end{aligned}$$

ma A_+ e A_- sono funzioni di Airy e dunque

$$(A_+ A'_- - A_- A'_+)' = A'_+ A'_- + A_+ t A_- - A'_- A'_+ - A_- t A_+ = 0$$

da cui $\det L = \text{cost } |\xi|^{4/3} / A'_+ A'_-$

Consegue che la matrice

$$\begin{vmatrix} |Dx|^{2/3} G_+(s,s) & |Dx|^{2/3} G_-(s,s) \\ D_t G_+(s,s) & D_t G_-(s,s) \end{vmatrix}$$

è invertibile poiché per (4), (5), $A_\pm(s|\xi|^{2/3})/A'_\pm(s|\xi|^{2/3}) \in S_{1,2/3}^0$.

Indichiamo con

$$K(s) = \begin{vmatrix} K_{11}(s) & K_{12}(s) \\ K_{21}(s) & K_{22}(s) \end{vmatrix}$$

l'inversa. Poniamo quindi

$$I(t,s) = |D_x|^{2/3} G_+(t,s) K_{11}(s) + |D_x|^{2/3} G_-(t,s) K_{21}(s)$$

$$J(t,s) = G_+(t,s) K_{12}(s) + G_-(t,s) K_{22}(s)$$

Ora

$$I(s,s) = I \quad D_t I(s,s) = 0$$

$$J(s,s) = 0 \quad D_t J(s,s) = I$$

La soluzione v di (2) è allora

$$v(t) = I(t, 0)\psi + J(t, 0)\phi + \int_0^t J(t, s)f(s, x) ds$$

2. CENNO AL CASO GENERALE

Indichiamo con $a_2(t, x, \xi)$ il simbolo principale di A e consideriamo l'equazione iconale

$$(6) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial \phi_{\pm}}{\partial t}\right)^2 = -t a_2(t, x, \frac{\partial \phi_{\pm}}{\partial x}) \\ \phi_{\pm}(0, x, \xi) = \langle x, \xi \rangle \end{cases}$$

Si prova [2] che esistono $\theta, \rho \in C^{\infty}([-T, 0] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N)$ omogenee di grado 1 e 2/3 con $\theta(t, x, \xi) = \langle x, \xi \rangle + t^2 \gamma(t, x, \xi)$,

$\rho(0, x, \xi) = 0$, $\frac{\partial \rho}{\partial t}(0, x, \xi) < 0$ tali che

$$\phi_{\pm} = \theta \pm \frac{2}{3} \rho^{3/2}$$

è soluzione di (4).

Per la costruzione di ϕ_{\pm} , si applica la teoria di Hamilton-Jacobi all'equazione

$$(7) \quad \frac{d\psi}{ds} = 2s^2 a_2(s^2, x, \frac{\partial \psi}{\partial x})^{1/2}$$

Se ψ è soluzione di (7), $\phi_{\pm}(t, x, \xi) = \psi(\pm \sqrt{t}, x, \xi)$ è soluzione di (6).

Introduciamo gli operatori

$$G_{\pm}(t) f(x)$$

$$= \int e^{i\theta(t,x,\xi)} \{g(t,x,\xi) A_{\pm}(G(t,x,\xi)) - ih(t,x,\xi) A'_{\pm}(G(t,x,\xi))\} \hat{f}(\xi) d\xi$$

con $g \sim \sum_0^{+\infty} g_{-\nu}$, $h \sim \sum_0^{+\infty} h_{-\frac{1}{3}-\nu}$ classici. Dalla definizione di A_{\pm}

segue

$$\begin{aligned} & \int e^{i\theta} \{g A_{\pm}(\rho) - ih A'_{\pm}(\rho)\} \hat{f} d\xi \\ &= \int_{C_{\pm}} (g + \tau h) e^{i(-\tau^{3/3} + \tau \rho + \theta)} d\tau \hat{f} d\xi \end{aligned}$$

Posto $\phi = -\tau^{3/3} + \tau \rho + \theta$, $a(t,x,\xi,\tau) = g(t,x,\xi) + \tau h(t,x,\xi)$,

$(D_t^2 + tA + B) G_{\pm}(t)f(x) = 0$ segue da

$$\int_{C_{\pm}} (D_t^2 + tA + B)(a e^{i\phi}) d\tau = 0(|\xi|^{-\infty}).$$

Attribuiamo a τ peso $1/3$ cosicché $a_{-\nu}$ quasi-omogenea di grado $-\nu$. In generale diremo che $b(t,x,\xi,\tau)$ è quasi-omogenea di grado m se $b(t,x,\lambda\xi, \lambda^{1/3}\tau) = b(t,x,\xi,\tau) \lambda^m$. L'osservazione che facciamo ora è cruciale. Sia $B(t,x,\xi,\tau)$ un polinomio in τ quasi omogeneo di grado m tale che $B(t,x,\xi, \pm \sqrt{\rho}) = 0$. Allora possiamo fattorizzare come $B(t,x,\xi,\tau) = (\tau^2 - G) Q(t,x,\xi,\tau)$, dove Q è un polinomio in τ omogeneo di grado $m - 2/3$.

Integrando per parti si trae

$$\begin{aligned}
 \int_{c_{\pm}} B e^{i\phi} d\tau &= \int_{c_{\pm}} (\tau^2 - G) Q e^{i\phi} d\tau \\
 &= \int_{c_{\pm}} -i \frac{\partial}{\partial \tau} e^{i\phi} Q d\tau = i \int_{c_{\pm}} e^{i\phi} \frac{\partial Q}{\partial \tau} d\tau
 \end{aligned}$$

e $\frac{\partial Q}{\partial \tau}$ (derivata complessa) è quasi-omogenea di grado $m-1$. Ora

$$\begin{aligned}
 \int_{c_{\pm}} (D_t^2 + tA + B)(a e^{i\phi}) d\tau \\
 = \int_{c_{\pm}} e^{i\phi} (\psi + L + M)a d\tau
 \end{aligned}$$

dove $\psi(t, x, \xi, \tau) = \frac{\partial \phi}{\partial t}^2 + t a_2(t, x, \frac{\partial \phi}{\partial x})$, $L = L(t, x, \xi, \tau, D_t, D_x)$:

funzioni quasi-omogenee di grado $m \rightarrow$ funzioni quasi-omogenee di grado $m+1$, $M = M(t, x, \xi, \tau, D_t, D_x)$: funzioni quasi-omogenee di grado $m \rightarrow$ funzioni quasi-omogenee di grado m . Sappiamo che $\Psi(t, x, \xi, \pm \sqrt{\rho}) = 0$ per cui per l'osservazione precedente, $\Psi(t, x, \xi, \tau) = (\tau^2 - \rho) Q(t, x, \xi, \tau)$. Se $g \sim \Sigma g_{-\nu}$ e $h \sim \Sigma h_{-\nu-1/3}$, poniamo $a_{-\nu} = g_{-\nu} + \tau h_{-\nu}$. Allora

$$\begin{aligned}
 \int_{c_{\pm}} (D_t^2 + tA + B)(a e^{i\phi}) d\tau \\
 = \int_{c_{\pm}} \psi a_0 e^{i\phi} d\tau + \int_{c_{\pm}} (\psi a_{-1} + L a_0) e^{i\phi} d\tau \\
 + \sum_{\nu=2}^{+\infty} \int_{c_{\pm}} (\psi a_{-\nu} + L a_{-\nu+1} + M a_{-\nu+2}) e^{i\phi} d\tau
 \end{aligned}$$

Abbiamo visto che $\int_{c_{\pm}} \psi a_{-v} e^{i\phi} d\tau = i \int_{c_{\pm}} e^{i\phi} \frac{\partial}{\partial t} (Q a_{-v}) d\tau$

Perciò possiamo scrivere

$$\begin{aligned} & \int_{c_{\pm}} (D_t^2 + tA + B)(a e^{i\phi}) d\tau \\ &= \int_{c_{\pm}} [L a_0 + i \frac{\partial}{\partial \tau} (Q a_0)] e^{i\phi} d\tau + \\ &+ \int_{c_{\pm}} [L a_{-1} + M Q_0 + i \frac{\partial}{\partial \tau} (Q a_{-1})] e^{i\phi} d\tau \\ &+ \sum_2^{\infty} \int_{c_{\pm}} [L Q_{-v} + M a_{-v+1} + i \frac{\partial}{\partial \tau} (Q a_{-v})] e^{i\phi} d\tau \end{aligned}$$

Richiediamo $(L a_0 + i \frac{\partial}{\partial \tau} (Q a_0))|_{r=\pm G} = 0$

Allora sempre per l'osservazione precedente

$$\begin{aligned} \int_{c_{\pm}} (D_t^2 + tA + B)(a e^{i\phi}) d\tau &= \int_{c_{\pm}} [L a_{-1} + M a_0 + i \frac{\partial}{\partial \tau} (Q a_{-1}) + F_{-1}] e^{i\phi} d\tau + \\ &+ \sum_2^{\infty} \int_{c_{\pm}} [L a_{-v} + M a_{-v+1} + i \frac{\partial}{\partial \tau} (Q a_{-v})] e^{i\phi} d\tau \end{aligned}$$

Dunque le equazioni del trasposto assumono la forma

$$(8) \quad L a_{-v} + i \frac{\partial}{\partial \tau} (Q a_{-v}) - F_{-v}|_{\tau=\pm \sqrt{\rho}} = 0$$

Non è difficile vedere che posto $a_{-\nu}^{\pm} = g_{-\nu} \pm \sqrt{\rho} h_{-\nu-1/3}$ la (8) si scrive come

$$(9)_{\pm} \quad - \sum_k t \frac{\partial a_2}{\partial \xi_k} (t, x, \theta_x \pm \sqrt{\rho} \rho_x) \frac{\partial a_{-\nu}^{\pm}}{\partial x_k} + C(t, x, \xi, \pm \sqrt{\rho}) a_{-\nu}^{\pm} = F_{-\nu}^{\pm}$$

Per le proprietà di ρ , si può considerare il cambiamento di variabile $t \rightarrow \rho$. Definiamo

$$\hat{a}_{-\nu}^{\pm}(\rho, x, \xi) = a_{-\nu}^{\pm}(t(\rho, x, \xi), x, \xi)$$

$$\tilde{a}_{-\nu}^{\pm}(s, x, \xi) = \hat{a}_{-\nu}^{\pm}(s^2, x, \xi)$$

Le $(9)_{\pm}$ diventano

$$(10)_{\pm} \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} \hat{a}_{-\nu}^{\pm} + \sum_1^N e_k^{\pm} \frac{\partial \hat{a}_{-\nu}^{\pm}}{\partial x_k} + e_{N+1}^{\pm} \hat{a}_{-\nu}^{\pm} = F_{-\nu}^{\pm} \\ \tilde{a}_{-\nu}^{\pm}(0, x, \xi) = \begin{cases} 1 & \nu = 0 \\ 0 & \nu > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Quindi dalle soluzioni di $(10)_{\pm}$ si ottengono le soluzioni di $(9)_{\pm}$ prendendo

$$a_{-\nu}^{\pm}(t, x, \xi) = \hat{a}_{-\nu}^{\pm}(\sqrt{\rho(t, x, \xi)}, x, \xi).$$

3. COSTRUZIONE DI w

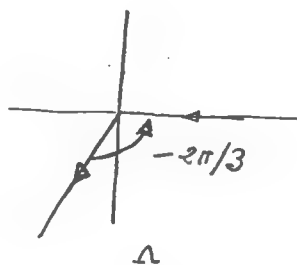
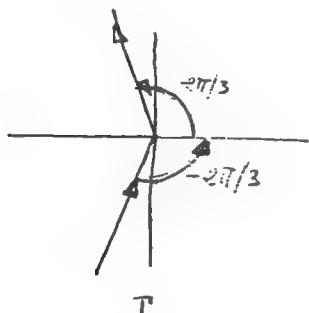
Prendiamo in esame ora il problema di Dirichlet [3] e cominciamo dal caso in cui $f \equiv 0$.

Introduciamo le funzioni di Airy $A(z)$ e $B(z)$ così definite

$$(11) \quad A(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \exp(z t - t^3/3) dt$$

$$(12) \quad B(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda} \exp(zt - t^3/3) dt$$

dove i cammini Γ e Λ sono rappresentati in figura



E' noto [4] che

$$(13) \quad A(\rho) \sim \rho^{-1/4} e^{-\frac{2}{3} \rho^{3/2}}, \quad \rho \geq 1$$

$$(14) \quad B(\rho) \sim \rho^{-1/4} e^{\frac{2}{3} \rho^{3/2}}, \quad \rho \geq 1.$$

Consideriamo l'operatore

$$(15) \quad H(t)g(x) = \int e^{i\langle x, \xi \rangle} A(t|\xi|^{2/3}) \hat{g}(\xi) d\xi$$

Ovviamente

$$(16) \quad \begin{cases} (D_t^2 + t|D_x|^2) H(t)g(x) = 0 \\ H(0)g(x) = g(x) \end{cases}$$

Osserviamo che a $t > 0$ fissato l'operatore $g \rightarrow H g(t, \cdot)$ è regolarizzante. Indichiamo con Φ^m la classe dei simboli $a(t, x, \xi)$ che verificano le stime

$$|t^p D_t^j D_\xi^\alpha D_x^\beta a| \leq c(1 + |\xi|)^{m-|\alpha| + \frac{2}{3}(j-p)}$$

Allora $k_0 = A(t|\xi|^{2/3}) \in \Phi^0$.

$$\text{Per esempio: } |D_t^j k_0| = |A^{(j)}(t|\xi|^{2/3})| |\xi|^{2j/3} \leq c|\xi|^{2j/3}$$

se $t|\xi|^{2/3} \leq 1$, mentre se $t|\xi|^{2/3} \geq 1$, utilizzando la (13) si trae

$$|D_t^j k_0| \leq c(t|\xi|^{2/3})^{j/2} e^{-2t^{3/2}|\xi|/3} |\xi|^{2j/3} \leq c|\xi|^{2j/3}.$$

$$t^p |k_0| \leq c t^p |\xi|^{2p/3} |\xi|^{-2p/3} \leq c |\xi|^{-2p/3} \text{ quando } t|\xi|^{2/3} \leq 1.$$

Se $t|\xi|^{2/3} \geq 1$ utilizzando nuovamente la (13) abbiamo

$$|t^p k_0| \leq c t^p e^{-2t^{3/2}|\xi|/3} = c (t|\xi|^{2/3})^p e^{-2t^{3/2}|\xi|/3}$$

$$|\xi|^{-2p/3} \leq c |\xi|^{-2p/3}.$$

Per quanto riguarda le derivate rispetto a ξ la stima segue

da

$$D_\xi^\alpha k_0 = \text{somma di elementi del tipo}$$

$$t^k A^{(k)}(t|\xi|^{2/3}) D_\xi^{\gamma_1} |\xi|^{2/3} \dots D_\xi^{\gamma_k} |\xi|^{2/3}$$

con $\gamma_1 + \dots + \gamma_k = \alpha$, $k \leq |\alpha|$. Se $t|\xi|^{2/3} \leq 1$, $|D_\xi^\alpha K_0| \leq t^k |\xi|^{2k/3 - |\alpha|} \leq c |\xi|^{-|\alpha|}$, mentre se $t|\xi|^{2/3} \geq 1$ di nuovo si utilizza la (13).

Esaminiamo ora il problema (2) con $f = 0$.

Poniamo

$$X = \bar{R}_t^+ \times \bar{R}_s^+ \times R_x^N \times \dot{R}_\xi^N$$

$$Y = \{(t, s, x, \xi) \in X \mid s \leq t\}$$

$$Z = \{(t, s, x, \xi) \in X \mid t \leq s\}$$

Sia $(t, s, x, \xi) \mapsto k(t, s, x, \xi) \in C^0(X) \cap C^\infty(Y) \cap C^\infty(Z)$

Formalmente consideriamo l'operatore

$$Kf(t, x) = \iint_{s \geq 0} e^{i\langle x, \xi \rangle} k(t, s, x, \xi) \hat{f}(s, \xi) ds d\xi,$$

$$f \in C_0^\infty(R_t \times R_x^N)$$

Se assumiamo che k non dipende da x :

$$(D_t^2 + t|D_x|^2) Kf(t, x) = \int e^{i\langle x, \xi \rangle} {}^\sigma D_t K(t, \xi) \hat{f}(t, \xi) d\xi$$

$$(17) \quad \iint_{s \geq 0} e^{i\langle x, \xi \rangle} (D_t^2 k + t|\xi|^2 k) \hat{f}(s, \xi) d\xi ds$$

dove ${}^\sigma D_t k(t, \xi) = \lim_{s \nearrow t} D_t K(t, s, \xi) - \lim_{s \searrow t} D_t K(t, s, \xi).$

Scegliamo $k(t,s,\xi)$ come segue

$$k(t,s,\xi) = \begin{cases} A(t|\xi|^{2/3}) B(s|\xi|^{2/3}) & t \geq s \geq 0 \\ B(t|\xi|^{2/3}) A(s|\xi|^{2/3}) & s \geq t \geq 0 \end{cases}$$

Notiamo che $i \sigma_{D_t} k(t,\xi) = |\xi|^{2/3} A'(t|\xi|^{2/3}) B(t|\xi|^{2/3}) - B'(t|\xi|^{2/3})$

$$A'(t|\xi|^{2/3}) = i\gamma |\xi|^{2/3} \text{ poiché } (A'B - B'A)' = 0.$$

Per come è stato scelto k abbiamo dunque

$$(D_t^2 + t|Dx|^2) Kf(t,x) = \gamma |Dx|^{2/3} f(t,x)$$

$$Kf(0,x) = \iint_{s \geq 0} e^{i\langle x, \xi \rangle} A(s|\xi|^{2/3}) \hat{f}(s,\xi) ds d\xi$$

Poniamo $\tilde{K} = \frac{1}{\gamma} |Dx|^{-2/3} K$. La soluzione w di (3) è allora

$$w(t,x) = \tilde{K}f(t,x) + H(t)(g(x) - \tilde{K}f(0,x)).$$

4. CENNO AL CASO GENERALE

Consideriamo semplicemente il caso $A(t,x,Dx) = a_2(x,\xi)$, $B \equiv 0$ con a_2 omogenea di grado 2. Vediamo come in questo caso si costruisce H . Precisamente cerchiamo H nella forma

$$Hf(t,x) = \int \exp(i\langle x, \xi \rangle) h(t,x,\xi) \hat{f}(\xi) d\xi$$

da cui segue

$$\begin{aligned}
 & (D_t^2 + tA) Hf(t, x) \\
 (18) \quad & = \int \exp(i\langle x, \xi \rangle) \{ D_t^2 h + t\omega^2 h + 2 + \sum_1^N a_{ij} \xi_j D_j K \\
 & + t \sum a_{ij} D_i D_j h \} \hat{f}(\xi) d\xi
 \end{aligned}$$

avendo posto $\omega = \sqrt{a_2} = \sqrt{a_{ij}(x) \xi_i \xi_j}$.

Diremo che $\psi(t, x, \xi)$ è pseudo-omogeneo di grado m se $\psi(t/\lambda, x, \lambda^{3/2}\xi) = \lambda^m \psi(t, x, \xi)$ $\lambda > 0$. Cerchiamo formalmente h come uno sviluppo asintotico del tipo $\sum_0^\infty h_{-\frac{3}{2}}^v$ con $h_{-\frac{3}{2}}^v$ pseudo-omogenea di grado $-\frac{3}{2}v$. Dalla (18) si trae dunque

$$\begin{aligned}
 & (D_t^2 + tA) Hf(t, x) \\
 v = \sum_0^{+\infty} v \quad & \exp(i\langle x, \xi \rangle) \{ h''_{-\frac{3}{2}v} - t\omega^2 h_{-\frac{3}{2}v} + F_{-\frac{3}{2}v+2} \} \hat{f}(\xi) d\xi
 \end{aligned}$$

con $F_{-\frac{3}{2}v+2}$ pseudo-omogenea di grado $-\frac{3}{2}v+2$, $F_0 = 0$.

Le equazioni di trasporto sono dunque

$$(19) \quad h''_{-\frac{3}{2}v} - t\omega^2 h_{-\frac{3}{2}v} = F_{-\frac{3}{2}v+2} \quad (h_{-\frac{3}{2}(v-1)}, \dots, h_0)$$

In [3] si prova che possiamo prendere come soluzioni delle

(19)

$$h_0 = A(t\omega^{2/3})$$

$$h - \frac{3}{2}v = \sum_1^v t^{3j} g_{2j-v}(x, \xi) A(t\omega^{2/3}) \\ + \sum_0^{v-1} t^{1+3j} g_{2j-v+2/3}(x, \xi) A'(t\omega^{2/3})$$

dove g_k è omogenea di grado k . Non è difficile provare che $h - \frac{3}{2}v \in \Phi^{-v}$ e quindi si può definire $h \sim \sum_0^{+\infty} h - \frac{3}{2}v$.

Osserviamo poi che $h_0(0, x, \xi) = 1$, $h - \frac{3}{2}v(0, x, \xi) = 0$, $v \geq 1$

La costruzione di K è più complessa. Cerchiamo $k(t, s, x, \xi)$

$$\sim \sum_0^{+\infty} k - \frac{3}{2}v(t, s, x, \xi) \quad \text{con } k_0 \in C^0(X) \cap C^\infty(Y) \cap C^\infty(Z),$$

$$k - \frac{3}{2}v \in C^\infty(X) \cap C^\infty(Y), \quad k - \frac{3}{2}v\left(\frac{t}{\lambda}, \frac{s}{\lambda}, x, \lambda^{3/2}\xi\right) = \lambda^{-\frac{3}{2}v} k - \frac{3}{2}v(t, s, x, \xi)$$

$\lambda > 0$. Allora segue

$$(D_t^2 + tA) Kf(t, x) \\ = \int e^{i\langle x, \xi \rangle} \sigma_{D_t k}(t, x, \xi) \hat{f}(t, \xi) \\ + \iint_{s \geq 0} e^{i\langle x, \xi \rangle} \{e^{-i\langle x, \xi \rangle} (D_t^2 + tA) (e^{i\langle x, \xi \rangle} k(t, s, x, \xi)) \hat{f}(\xi) d\xi$$

Scegliamo k_0 in questo modo

$$k_0(t, s, x, \xi) = \begin{cases} A(t\omega^{2/3}) B(s\omega^{2/3}) & t \geq s \geq 0 \\ B(t\omega^{2/3}) A(s\omega^{2/3}) & s \geq t \geq 0 \end{cases}$$

Le equazioni di trasporto sono del tipo

$$(20) \quad k''_{-\frac{3}{2}\nu} - t\omega^2 k_{-\frac{3}{2}\nu} = G_{-\frac{3}{2}\nu} + 2, \quad \nu \geq 0, \quad G_2 \equiv 0$$

In [3] si prova che possiamo prendere $k_{-\frac{3}{2}\nu}$ soluzione di (20) con un comportamento del tipo

$$k_{-\frac{3}{2}\nu} \sim |\xi|^{-\nu} (t^{3/2} - s^{3/2})^j |\xi|^j A(t\omega^{2/3}) B(s\omega^{2/3}), \quad t \geq s \geq 0$$

$$k_{-\frac{3}{2}\nu} \sim |\xi|^{-\nu} |(t^{3/2} - s^{3/2})^j| |\xi|^j A(s\omega^{2/3}) B(t\omega^{2/3}), \quad s \geq t \geq 0$$

Cioè si può definire $k \sim \sum_0^{+\infty} k_{-\frac{3}{2}\nu}$. Ora $\sigma_{D_t} k$ risulta essere uno pseudo-differenziale con simbolo principale $\cos t \omega^{2/3}$ e quindi ellittico.

BIBLIOGRAFIA

- [1] L. BOUTET DE MONVEL, Journal d'Analyse Math. XVII (1966) p. 241-304.
- [2] M. IMAI, HOK K. Math. J. 8 (1979), p. 126-143.
- [3] F. SEGALA, Parametries for the operators of Tricomi's type. Apparirà su Ann. di Mat. Pura e Appl.
- [4] W. WASOW, Asymptotic expansions for ordinary differential equations. Interscience, 1965.